Corrigé Exercice 1

1. Si la bille s'arrête sur un numéro joué par Thomas son gain sera de $35 \times 2 - 30 \times 2 = 10$.
Comme la roue est composée de 37 numéros, Thomas a donc une probabilité de $\frac{30}{37}$ de gagner 10 euros.
Si la bille s'arrête sur un autre numéro que ceux joués par Thomas son gain sera de $-30 \times 2 = -60$ avec une probabilité de $\frac{7}{37}$.
La loi du gain algébrique de Thomas peut être résumée dans ce tableau :

Gain algébrique	10	-60
Probabilité	$\frac{30}{37}$	$\frac{7}{37}$

2. a. Thomas joue dix parties. Lorsqu'il gagne, il gagne 10 € et lorsqu'il perd, il perd 60 €. X compte le nombre de fois où Thomas gagne et G le gain algébrique donc $G = 10 \times X - 60 \times (10 - X) = 10X - 600 + 60X = 70X - 600$.
b. On répète 10 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « la bille s'arrête sur un numéro joué par Thomas ») de paramètre $p = \frac{30}{37}$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{30}{37}$.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10 ; \frac{30}{37}\right)$.
$E(X) = 10 \times \frac{30}{37} = \frac{300}{37} \approx 8{,}11$. Si Thomas joue dix fois de suite un grand nombre de fois, il peut espérer gagner en moyenne 8,1 fois.
c. Soit G la variable aléatoire modélisant le gain de Thomas. $E(G) = 70E(X) - 600 \approx -32{,}43$. Si Thomas joue dix fois de suite un grand nombre de fois, il perdra en moyenne 32,43 €.
3. Lorsque Thomas joue n fois avec la même stratégie, X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n ; \frac{30}{37}\right)$ et $E(X) = n \times \frac{30}{37}$.

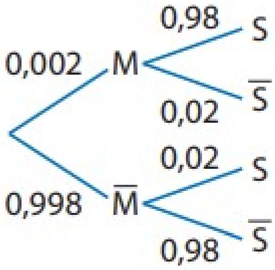
On en déduit que $E(G) = \frac{30n}{37} \times 10 - \left(n - \frac{30n}{37}\right) \times 60 = -\frac{120n}{37}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{120n}{37} \leqslant 0$, Thomas ne peut donc pas espérer gagner de l'argent avec sa stratégie.

Corrigé Exercice 2

Partie A

1. D'après l'énoncé, $P(M) = \frac{1}{500} = 0{,}02$, $P_M(S) = 0{,}98$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S}) = 0{,}98$.

2.



3. $P(S) = P(S \cap M) + P(S \cap \overline{M})$
$= P(M) \times P_M(S) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(S)$
$= 0{,}002 \times 0{,}98 + 0{,}998 \times 0{,}02$
$= 0{,}02192.$

4. $P_S(M) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}002 \times 0{,}98}{0{,}02192} = \dfrac{49}{548} \approx 0{,}089.$

Partie B

1. On répète 80 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli à deux issues (dont le succès est « la personne fait sonner le portique ») de paramètre $p = 0{,}02192$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}02192$.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(80\,;\,0{,}02192)$.

2. $E(X) = 80 \times 0{,}02192 = 1{,}7536$.
En moyenne, sur 80 passages, le portique sonne environ 1,75 fois.

3. a. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}830$.
b. $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}992$.

4. a. $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}7$ et $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}9008 > 0{,}9$, donc le plus petit entier cherché est $n = 3$.
b. La probabilité qu'il y ait au plus 3 personnes qui fassent sonner le portique est supérieure à 90 %.

Corrigé Exercice 3

Partie A

1. X suit la loi uniforme sur $\{1;2;3;4;5;6\}$ et Y suit la loi uniforme sur $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$.

2. $E(X)=3{,}5$ et $V(X)=\frac{35}{12}$.

$E(Y)=6{,}5$ et $V(Y)=10$.
$E(Z)=E(X)+E(Y)=3{,}5+6{,}5=10$.

3. La face affichée par le dé cubique est indépendante de la face affichée par le dé dodécaédrique. On peut donc considérer les deux variables X et Y comme indépendantes.

4. $V(Z)=V(X)+V(Y)=\frac{35}{12}+10=\frac{155}{12}$.

Partie B

1. Il y a $12\times 6=72$ issues à cette expérience aléatoire. Parmi ces issues, six permettent d'obtenir un total de point supérieur à 15 : (6 ; 10), (5 ; 11), (6 ; 11), (4 ; 12), (5 ; 12) et (6 ; 12).

La probabilité d'avoir le bonus est donc égale à $\frac{15}{72}=\frac{5}{24}$.

2.

b_i	0	1
$P(B)=b_i$	$\frac{19}{24}$	$\frac{5}{24}$

$E(B)=\frac{5}{24}$

et $V(B)=\frac{95}{576}$.

On a $E(S_n)=n\times E(B)=\frac{5n}{24}$ et $V(S_n)=n\times V(B)=\frac{95n}{576}$.

3. $E(Z_n+S_n)=E(Z_n)+E(S_n)=10n+\frac{5n}{24}=\frac{245n}{24}$.

4. Il suffit de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $E(Z_n+S_n)\geqslant 300$.

Or $E(Z_n+S_n)\geqslant 300 \Leftrightarrow \frac{245n}{24}\geqslant 300 \Leftrightarrow n\geqslant 29{,}4$.

Il faut donc en moyenne 30 lancers de dés pour terminer le parcours.

Corrigé Exercice 4

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3\}$.

2.

a_i	0	1	2	3	4
$P(A_2)=a_i$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$E(X_1)=E(X_2)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}+3\times\frac{1}{3}=2.$

Or $6-E(X_1+X_2)=6-E(X_1)-E(X_2)$, donc $6-E(X_1+X_2)=2$.

De plus, $E(A_2)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{9}=2.$

On a donc bien $E(A_2)=6-E(X_1+X_2)$.

3. Si la carte avec le numéro 3 est tirée une première fois, suivi de la carte avec le numéro 2 et enfin une nouvelle fois la carte numéro 3. On a donc $6-(X_1+X_2+X_3)=6-8=-2$. Or les valeurs de la variable aléatoire A_3 sont positives puisque c'est le capital au troisième tirage.

Donc les variables A_3 et $6-(X_1+X_2+X_3)$ n'ont pas la même espérance.

4. On peut faire un arbre de toutes les possibilités.

a_i	0	1	2	3
$P(A_3)=a_i$	$7\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$10\times\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$6\times\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$E(A_3)=10\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+12\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{25}{27}.$

On peut faire un arbre de toutes les possibilités.

a_i	0	1	2
$P(A_4)=a_i$	$18\times\left(\frac{1}{3}\right)^4+6\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$28\times\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$8\times\left(\frac{1}{3}\right)^4$

$E(A_4)=1\times 28\times\left(\frac{1}{3}\right)^4+2\times 8\times\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{44}{81}.$

5. A_6 prend des valeurs positives ou nulles chacune avec une probabilité strictement positive. Donc au moins une de ses valeurs est strictement positive. L'espérance étant le produit des valeurs par leur probabilité, $E(A_6)>0$ et ne peut donc pas être nulle.

6. On fait le même raisonnement qu'à la question **5** : A_n prend des valeurs positives ou nulles, chacune avec une probabilité strictement positive. Donc au moins une de ses valeurs est strictement positive car A_n ne prend pas que les valeurs nulles. L'espérance étant le produit des valeurs par leur probabilité, $E(A_n)>0$ et ne peut donc pas être nulle.